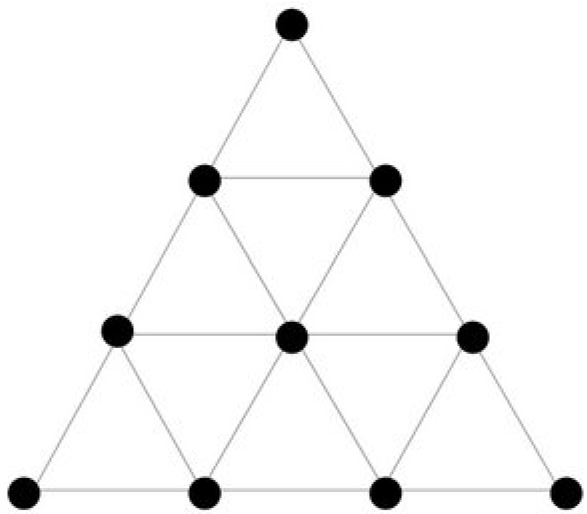
LA TETRAKTYS PITAGORICA* Y EL DELTA MASONICO

Arturo Reghini

No, lo juro por aquel que ha transmitido
a nuestra alma la tetraktys en que se
encuentran la fuente y la raíz de la eterna
Naturaleza.
Versos Dorados



Exhumar y restituir la antigua aritmética pitagórica es una tarea difícil vista la escasez de las informaciones que nos han llegado, y cuya mayor parte no inspiran confianza. Haría falta en cada momento citar sus fuentes y discutir su valor, lo que entorpecería y alargaría inútilmente nuestra exposición sin por ello hacerla más inteligible. Renunciaremos pues a todo aparato filológico y nos atendremos a aquello que es menos controvertido. Pero no dejaremos de señalar todo lo que se refiera a nuestra opinión personal o a los resultados de nuestras investigaciones.

La bibliografía pitagórica antigua y moderna es muy extensa; renunciamos a enumerar las centenas de libros, estudios, artículos y pasajes que la constituyen. Para ciertos críticos, historiadores y filósofos, Pitágoras no habría sido más que un moralista y no se habría ocupado nunca de las matemáticas; para ciertos hipercríticos, no habría existido nunca.

Personalmente tenemos por cierta su existencia y, aceptando el testimonio del filósofo Empédocles, su casi contemporáneo, pensamos que sus conocimientos en todos los dominios de la ciencia eran muy vastos. Pitágoras vivió en el siglo VII antes de nuestra era; fundó en Calabria una escuela y una Orden que Aristóteles llamaba escuela itálica y enseñó entre otras la aritmética y la geometría. Según Proclo, jefe de la escuela de Atenas en el siglo V de nuestra era, Pitágoras fue el primero que elevó la geometría a la dignidad de ciencia liberal, y según Tannery, "la geometría salió de la cabeza de Pitágoras como Minerva del cerebro de Júpiter".

Pero ninguno de sus escritos o de aquellos que le fueron atribuidos nos ha llegado, y es muy posible que Pitágoras no haya escrito jamás. Incluso si esto no hubiera sido así, además de que su extrema antigüedad habría podido impedir la transmisión, no hay que olvidar el secreto que los pitagóricos hacían pesar sobre su enseñanza o al menos sobre una parte. Un filólogo belga, Armand Delatte, en su primera obra: *Etudes sur la littérature pythagoricien* (París, 1915), ha hecho una sabia crítica de las fuentes de la literatura pitagórica; ha demostrado, entre otras, que los famosos "Versos Dorados", aunque debidos a la recopilación de un neo-pitagórico del siglo II o IV de nuestra era, permiten remontarse casi al comienzo de la escuela pitagórica, pues transmiten un material arcaico. La obra de Delatte será nuestra principal fuente. Se posee otros testimonios antiguos en los escritos de Filolao, de Platón, de Aristóteles y de Timeo de Tauromenio. Filolao fue, con Arquitas de Tarento, uno de los más eminentes pitagóricos y uno de los más cercanos, en el tiempo, a Pitágoras. Timeo fue un historiador del pitagorismo, y el gran filósofo Platón experimentó tan fuertemente la influencia del pitagorismo que es posible considerarle como un pitagórico incluso aunque no perteneciera a esta escuela. Los biógrafos de Pitágoras son menos antiguos: Jámblico, Porfirio y Diógenes Laercio, neo-pitágoricos de los primeros siglos de nuestra era, y los matemáticos Teón de Esmirna y Nicómaco de Gerasa. Son los tratados matemáticos de estos dos últimos autores los que nos han transmitido la aritmética pitagórica. Boecio también ha contribuido a ello. Por último se deben numerosas informaciones a Plutarco.

Entre los modernos, además de Delatte, la obra un poco desfasada de Chaignet sobre *Pythagore et la philosophie pythagoricienne* (París, 2ª edición 1874) y el libro de Augusto Rostagni *Il Verbo di Pitagora* (Turín 1924), utilizaremos *The Theoretic Aritmetic of the Pythagoreans* (Londres 1816, 2ª edición Los Angeles 1934) del erudito helenista inglés Thomas Taylor que fue un neo-platónico y un neo-pitagórico. Entre los historiadores de la matemática utilizaremos *Le scienze esatte nellêantica Grecia* (Milán, 2ªedición 1914) de Gino Loria, así como *A History of Greek Mathematics* de T. Heath (1921).

Para la matemática moderna la unidad es el primer número de la serie natural de los números enteros, que se obtiene partiendo de la unidad y añadiendo sucesivamente otra unidad. No es lo mismo en la aritmética pitagórica. En efecto, la misma palabra mónada, designaba la unidad de la aritmética y la mónada, entendida metafísicamente diríamos hoy. El paso de la mónada universal a la dualidad no es tan simple como el paso del uno al dos por adición de dos unidades.

La aritmética, la pitagórica también, conlleva tres operaciones directas: la suma, la multiplicación y la elevación a la potencia, acompañadas de tres operaciones inversas. Ahora bien, el producto de la unidad por ella misma es también la unidad, y una potencia de la unidad es también la unidad. Así pues, sólo la suma permite el paso de la unidad a la dualidad. Lo que significa que para obtener dos, hay que admitir que pueda haber dos unidades, por consiguiente tener ya el concepto de dos, ya sea que la mónada pueda perder su carácter de unicidad, que pueda diferenciarse, ya sea que pueda haber una doble unidad o una multiplicidad de la unidad. Filosóficamente se plantea el problema del monismo y del dualismo, metafísicamente el del Ser y de su representación, biológicamente el problema de la célula y de su reproducción. Ahora bien, si se admite la unicidad intrínseca y esencial de la Unidad, hay que admitir que otra unidad no puede ser más que una apariencia, y su aparición una alteración de la unicidad debida a la distinción que la Mónada hace en sí-misma. Igualmente la consciencia establece una distinción entre el sí y el no-sí. Según el Vêdânta *advaïta* (*advaïta* = sin dualidad) esta distinción es una ilusión, la gran ilusión incluso, y no hay aquí otra cosa que hacer sino liberarse de ella. No obstante no es ilusorio que esta ilusión existe, aún cuando sea posible ir más allá de ella. Los pitagóricos decían que la díada estaba engendrada por la unidad que se alejaba o se separaba de ella misma, que se dividía en dos; e indicaban esta diferenciación o polarización mediante diferentes palabras: *diéresis*, *tolma*.

Para la matemática pitagórica, la unidad no era un número, sino el principio, el arcano de todos los números, digamos el principio y no el comienzo. Una vez admitida la existencia de otra unidad y de varias unidades, es de la unidad que van a derivar, por adición, el dos y todos los números. Los pitagóricos concebían los números como formados y constituidos o representados por puntos dispuestos de manera diferente. Definían el punto como la unidad posicionada, mientras que para Euclides el punto es aquello que no tiene partes. La unidad era representada por el punto (*sêmeion* = signo) o, cuando el sistema alfabético de la numeración escrita fue adoptado, por la letra A o a, que servía para designar a la unidad.

Admitida la posibilidad de la suma de la unidad, se obtiene el dos, representado por los dos puntos extremos de una recta, y se puede continuar añadiendo unidades y obtener, sucesivamente, todos los números representados por dos, tres, cuatro... puntos alineados. Se obtiene de esta manera el desarrollo lineal de los números. Aparte del dos, que no puede obtenerse más que por la suma de dos unidades, todos los números enteros pueden ser considerados como suma de otros números: por ejemplo, cinco es

$$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1};$$

pero también

$$\mathbf{5 = 1 + 4 \text{ y } 5 = 2 + 3}.$$

El uno y el dos no gozan de esta propiedad general de los números. Es por esto, que, al igual que la unidad, el dos no era para los antiguos pitagóricos un número sino el principio de los números pares. Esta concepción se perdió más tarde, pues Platón habla del dos como "pareja" [1] y Aristóteles [2] como del único primero número par. Tres a su vez no puede ser considerado más que como la suma de uno y de dos; mientras que todos los otros números no son solamente la suma de varias unidades sino también la de dos partes, ambas diferentes de la unidad. Algunos pueden ser considerados como la suma de dos partes iguales entre ellas, como dos es la suma de dos unidades, y, en razón de esta similitud con el dos, (la pareja = *ampho*), tienen el nombre de los números pares; así por ejemplo: 4 = 2 + 2 y 6 = 3 + 3, etc., son números pares, mientras que los otros, como tres y cinco, no son la suma de dos partes o de dos términos iguales y se llaman números impares. Así pues la tríada 1, 2, 3 goza de propiedades que no tienen los números superiores a 3.

En la serie natural de los números, los pares y los impares se suceden alternativamente. Los números pares tienen en común con el número dos el carácter que acabamos de mencionar y pueden ser representados siempre bajo forma de un rectángulo (*épipedos*) del cual un lado contiene dos puntos, mientras que los números impares no presentan este carácter, como la unidad, y cuando pueden ser representados bajo una forma rectangular, a veces la base y la altura contienen respectivamente un número de puntos que, a su vez, es un número impar. Nicómaco cita una definición todavía más antigua: salvo la díada fundamental, un número es par cuando se le puede dividir en partes iguales o desiguales, ambas pares o impares, o, como diríamos hoy, que tienen la misma paridad; mientras que los números impares no pueden dividirse más que en dos partes desiguales, de las cuales una es par y la otra impar, así pues en partes que tienen una paridad diferente.

Según Heath [3] la distinción entre par e impar se remonta sin duda a Pitágoras, lo que no dudamos en creer. Reidmeister [4] dice que la teoría del par y del impar es pitagórica, y que en esta noción se esconde la ciencia lógico-matemática de los pitagóricos y que es el fundamento de la metafísica pitagórica. *Numero impari*, dice Virgilio, *Deus gaudet* ["Dios se complace con el número impar"].

La tradición masónica está de acuerdo sobre el carácter sagrado o divino de los números impares, como lo prueban los números que expresan la edad iniciática, los de las luces, las joyas, los hermanos que componen un taller, etc. Dondequiera que se presenta una distinción, una polaridad, se tiene una analogía con la pareja del par y del impar, y puede establecerse una correspondencia entre los dos polos y el par y el impar; así, para los pitagóricos el masculino era impar y el femenino par, la derecha impar y la izquierda era par...

Los números, empezando por el número tres, admiten además de la representación lineal una representación plana. El número tres es el primero que admite además de la representación lineal una representación plana, gracias a los tres vértices de un triángulo (equilátero). El número tres es un triángulo, o número triangular; es el resultado del acoplamiento de la mónada y de la díada. Se tiene así con la trinidad la manifestación o la epifanía de la mónada en el mundo de la extensión. Aritméticamente:

$$\mathbf{1 + 2 = 3}.$$

Proclo [5] observa que el número dos posee un carácter, en cierta manera, intermediario entre la unidad y el número tres. No solamente porque es la media aritmética de ambos, sino también porque es el único número que da el mismo resultado si se le suma a sí mismo o si se le multiplica por sí mismo, mientras que para la unidad el producto es inferior a la suma, y para el número tres es superior; sea:

$$\mathbf{1 + 1 = 2 > 1 \,.\, 1;\quad 2 + 2 = 4 = 2 \,.\, 2;\quad 3 + 3 = 6 < 3 \,.\, 3}$$

En cambio los modernos han observado que 1, 2, 3 son los únicos números enteros positivos cuya suma sea igual al producto. Se puede también fácilmente reconocer que 1, 2, 3 es la única tríada de números enteros consecutivos en la que la suma de los dos primeros es igual al tercero; en efecto la ecuación:

$$\boldsymbol{x + (x + 1) = x + 2}$$

admite como única solución:

$$\boldsymbol{x = 1}.$$

Por otra parte, gracias a la representación geométrica, se ve inmediatamente que la suma de varios números enteros consecutivos sobrepasa siempre el número que sigue al último de los términos sumados, salvo en el caso donde se tiene 1 + 2 = 3. Concluyendo, la tríada, la santa trinidad, no puede obtenerse más que por la suma de la mónada y de la díada.

Obtenido así el número tres, y considerando la mónada como potencialmente triangular, se tiene el segundo número triangular; se puede obtener los otros números triangulares añadiendo a su base el número tres, y se obtiene el número triangular 6; y continuando añadiendo a su base cuatro puntos, se tiene el número 10.

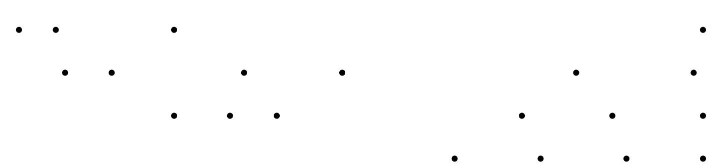


Figura 1

El desarrollo geométrico del primer triángulo, con respecto a uno de los tres vértices tomado como centro de homotecia, nos da así la serie de los números triangulares sucesivos. Se llama gnomon triangular a la base que se añade para pasar de un número triangular al siguiente. Aritméticamente, después de haber escrito en fila la sucesión de los números enteros, se deduce de aquí la sucesión de los números triangulares, escribiendo la unidad bajo la unidad, después haciendo la suma de uno y de dos, después tomando por elemento de la segunda fila los números obtenidos haciendo sucesivamente la suma de los primeros números enteros, o bien haciendo, para obtener un elemento de la segunda fila, la suma del elemento que lo precede en la misma fila con el que lo precede en la misma columna:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**. . .**
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**	**66**	**. . .**

Así, por definición, el $n^{\text{enésimo}}$ número triangular es la suma de los n primeros números enteros, y es pues igual al $(n-1)^{\text{enésimo}}$ número triangular aumentado en n.

Si el número triangular tres tiene la forma de un triángulo equilátero, continuando el desarrollo homotético, los otros números triangulares tendrán también ellos una forma regular, conservándose en el desarrollo la semejanza de la forma. Además, dado que se puede disponer alrededor de un punto seis ángulos de 60º (como lo sabían los pitagóricos), se tiene pues seis triángulos equiláteros convergentes alrededor de un punto; desarrollándolos los seis con respecto a su vértice común tomado como centro de homotecia, se llena totalmente e isotrópicamente el plano de triángulos regulares.

El número cuatro, además de su representación lineal, no admite más que una única representación plana:

Figura 2

Por consiguiente es un cuadrado; es el segundo cuadrado, porque la unidad es el cuadrado de uno. El gnomon del cuadrado, o la diferencia entre el número cuatro que es el segundo número cuadrado y el cuadrado precedente, es 3; el tercer cuadrado, o, como decimos, el cuadrado de base 3, se representa geométricamente agregando, abajo y a la derecha, un gnomon compuesto de 5 puntos, y así, sin interrupción, se pasa de un cuadrado al cuadrado siguiente añadiendo sucesivamente los números impares. Se ve así que los cuadrados crecen conservando la semejanza de la forma; y, como puede disponerse alrededor de un punto cuatro ángulos rectos convergentes y en cada uno de ellos un cuadrado, resulta de aquí que, desarrollando homotéticamente, con respecto al vértice común tomado como centro de homotecia, los cuatro cuadrados, se llena el plano totalmente e isotrópicamente gracias a los cuadrados.

Aritméticamente basta escribir en una primera fila los números impares y proceder para la segunda como en los números triangulares, para obtener los números cuadrados:

1	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**. . .**
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**. . .**

De aquí esta importante propiedad: La suma de los n primeros números impares es igual al $n^{\text{enésimo}}$ número cuadrado, propiedad que permitió a Galileo encontrar la fórmula del movimiento uniformemente acelerado.

Un cuadrado es un número en forma de rectángulo cuyos lados contienen un número igual de puntos. Un número de forma rectangular era llamado *heterómeco* si un lado contenía un solo punto de más que el otro lado, y era llamado *promeco* si la diferencia entre los puntos de ambos lados era mayor que uno. Por ejemplo el número 15 es *promeco* y el número 20 *heterómeco*.

Figura 3

Llevando sobre un lado y paralelamente a una diagonal una línea recta, ésta divide a un número *heterómeco* en dos partes que son dos triángulos rectángulos iguales: y como el número de puntos del $n^{\text{enésimo}}$ *heterómeco*, constituido por n columnas y por $n + 1$ filas, es $n\ (n + 1)$, resulta para el $n^{\text{enésimo}}$ número triangular la fórmula $\underline{n\ (n + 1)}$.

Recordando la definición del número triangular, se tiene:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + . . . + \underline{n = n\ (n + 1)}}$$

En cambio si se lleva en un número cuadrado la paralela a una diagonal, éste se divide en dos números triangulares consecutivos; por consiguiente la suma de dos números triangulares consecutivos es igual a un número cuadrado; esto permite deducir de la sucesión de los números triangulares la de los números cuadrados. Escribiendo en una primera fila la sucesión de los números triangulares, se obtiene en la segunda la de los números cuadrados, escribiendo debajo de cada elemento de la primera fila la suma de éste con el elemento que lo precede.

1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**. . .**
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**. . .**

Al contrario del número tres, el número cuatro admite también una representación geométrica espacial. Elevando la perpendicular al plano en el centro de un triángulo equilátero, ésta tiene un punto igualmente distante de los tres vértices del triángulo y cuya distancia es igual al lado del triángulo; los cuatro puntos son los vértices de un tetraedro llamado pirámide por los griegos [6], o pirámide regular de base triangular, que es la representación en el espacio del número cuatro [figura 3 bis][**].

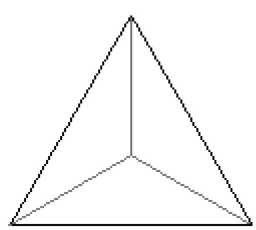


Figura 3 bis

En este caso, igualmente, el desarrollo homotético es posible con respecto a uno de los vértices; se puede pues disponer bajo la base el número triangular consecutivo y se obtiene así los números tetraédricos. El gnomon del tetraedro está constituido por el número triangular que se añade al tetraedro precedente. El primer número tetraédrico es la unidad: el segundo es 4, porque 1 + 3 = 4; el tercero es 10, porque 4 + 6 = 10. Partiendo de una primera fila compuesta enteramente de unidades, y escribiendo en la segunda fila la sucesión de los números naturales, en la tercera la de los números triangulares y en la cuarta la de los tetraédricos, se obtiene la tabla siguiente:

➢ **unidad**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**. . .**
➢ **números lineales**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**. . .**
➢ **números triangulares**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**. . .**
➢ **números tetraédricos**	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**120**	**165**	**. . .**

La ley de formación de esta tabla es la siguiente: todo elemento de la tabla es igual a la suma de todos los elementos de la fila precedente a partir del primero hasta el que está directamente encima del elemento considerado; por ejemplo el número

$$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1,}$$

el número

$$\mathbf{15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5,}$$

el número

$$\mathbf{35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15;}$$

o: cada elemento es también igual a la suma del que le precede en la misma fila y del que está encima de él en la misma columna, por ejemplo el número

$$\mathbf{35 = 20 + 15.}$$

No existe más que un solo desarrollo lineal de los números. En cambio existe una infinidad de desarrollos planos y de desarrollos sólidos. Por ejemplo el número 5 puede representarse en el plano por los cinco vértices de un pentágono y en el espacio por los de una pirámide de base cuadrada. En cuanto al desarrollo de los números pentagonales, se lleva a cabo tomando como centro de homotecia el vértice de la pirámide. Para obtenerlos aritméticamente, basta con partir de la sucesión de términos de la serie aritmética de razón tres, sea los números, 1, 4, 7, 10, 13, 16... y sumarlos. La suma de los *n* primeros es igual al $n^{\text{enésimo}}$ número pentagonal, y los números pentagonales son: 1, 5, 12, 22, 35, 51... Los números piramidales de base cuadrada se obtienen en cambio haciendo la suma de los *n* primeros números cuadrados consecutivos, 1, 4, 9, 16, 25...; y son los números: 1, 5, 14, 30, 55...

De la misma manera se obtienen los números hexagonales partiendo de la serie aritmética de razón 4, o serie de gnomons hexagonales, que son: 1, 5, 9, 13, 17...; y los números hexagonales son: 1, 6, 15, 28, 45... Se reconoce fácilmente que el $n^{\text{enésimo}}$ número hexagonal no es otro que el número $(2n - 1)$ triangular. Se podría mostrar también que en el desarrollo homotético de los números pentagonales y hexagonales, se conserva la semejanza de la forma, pero no la isotropía; es por lo que, aunque el plano permite una repartición en hexágonos regulares, no se puede cubrirlo completamente e isotrópicamente mediante el desarrollo homotético de tres números hexagonales convergentes alrededor de un vértice común. Se puede igualmente demostrar que el espacio no permite equipartición más que por los cubos cuyos vértices pueden llenarlo totalmente e isotrópicamente, pero no permite otras equiparticiones, aunque el tetraedro y el octaedro son desarrollables homotéticamente y cubren totalmente e isotrópicamente el anguloide en el cual se desarrollan. Hacemos esta observación porque Aristóteles, después de haber dicho [7] correctamente que el plano no puede llenarse más que por los triángulos, cuadrados y hexágonos regulares, añade que el espacio puede llenarse por los cubos y las pirámides. Se trata de un error en el que Aristóteles ha caído; y, como los tres números poliédricos regulares, tetraédrico, cúbico y octaédrico, desarrollados homotéticamente en uno de sus anguloides, lo llenan totalmente e isotrópicamente, el error de Aristóteles fue haber confundido el espacio con el espacio del anguloide; pero, si el error viene de una confusión de este tipo, por otro lado se tiene la prueba indirecta de que los pitagóricos se interesaban ya en los números cúbicos, tetraédricos y octaédricos, así como en el problema de la equipartición del plano gracias a los polígonos regulares y del espacio gracias a los poliedros regulares, y en particular del espacio contenido en un anguloide. Además de los números planos, llamados números poligonales, y de los números piramidales representados en el espacio por pirámides de base poligonal, los pitagóricos se ocuparon de los números planos y sólidos de forma rectangular, y de los paralepípedos de forma de poliedro regular. La fórmula, que da el $n^{\text{enésimo}}$ número poligonal de *r* lados, conocida por Diofanto, es:

$$\mathbf{P\,(r,\ \mathit{n}) = \underline{\mathit{n}}\,\{\,(\,r - 2)\,\mathit{n} - (\,r - 4)\,\}}$$

por ejemplo para *n* = 4 y *r* = 6 esta fórmula da para el cuarto número hexagonal P (6,4) = 28; los puntos que lo representan tienen la disposición siguiente:

La fórmula que da el $n^{\text{enésimo}}$ número piramidal de base *r*-gonal es:

$$\mathbf{F}\,(r\,,\,n) = \underline{n\,(n+1)}\ \{\,(r - 2)\,n - (r - 5)\,\}$$

que bajo otra forma se encuentra en el *Codex Arcerianus*, código romano del 450 de nuestra era [8]. Por ejemplo, para *r* = 4 y *n* = 5 se halla que el quinto número piramidal de base cuadrada es F 4 , 5) = 55.

Dado que para delimitar un segmento de recta hace falta dos puntos, el número mínimo de rectas que sirven para delimitar una porción de plano es tres; entre todos los números planos, tres es el menor; análogamente el número mínimo de planos necesarios para delimitar una porción de espacio es cuatro; entre todos los números sólidos, el número cuatro o el tetraedro es el menor. Según Platón (cf. *Timeo*) este tetraedro, o pirámide como él le llama, es la última partícula que constituye los cuerpos, el átomo o molécula de la materia. Naturalmente sabemos hoy que los átomos o las moléculas no tienen esta forma y que no son indivisibles, pero es interesante observar que el cuerpo que posee la mayor solidez molecular, el diamante, tiene una molécula compuesta por cuatro átomos dispuestos en forma de tetraedro regular [9].

Añadiendo la unidad a la unidad, se pasa del punto a la línea, determinada por dos puntos: añadiendo a estos dos puntos otro punto se puede pasar al plano con el triángulo; y añadiendo todavía la unidad se puede pasar al espacio con el tetraedro. Pero permaneciendo en los límites de la intuición humana del espacio tridimensional no es posible añadir una unidad a los cuatro vértices del tetraedro tomando un punto fuera del espacio tridimensional y representar el número 5 como una pirámide del hiperespacio que tenga por base el tetraedro. En otras palabras, de la unidad se pasa al número dos y se tiene la línea, del número dos se pasa al número tres y se tiene el plano, del número tres se pasa al número cuatro y se tiene el espacio; y luego, hay que pararse, se ha llegado al fin del proceso. Ahora bien, según la acepción aristotélica, y solamente griega, de la palabra perfección, las cosas son perfectas cuando están terminadas, completadas; el límite, el fin, es una perfección. En nuestro caso, como cuatro es el último número que se obtiene pasando del punto a la línea, de la línea al plano y del plano al espacio, porque no se puede representar un quinto punto fuera del espacio definido por los cuatro vértices del tetraedro, el número cuatro es, en el sentido genérico griego y pitagórico de la perfección, un número perfecto. El conjunto de la mónada, de la díada, de la tríada y de la tétrada comprende el todo: el punto, la línea, la superficie y el mundo concreto material sólido; y no se puede ir más allá. Así pues, también la suma:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 = 10}$$

ya sea el conjunto, o la tétrada de la unidad, de la dualidad, de la trinidad y de la tétrada, ya sea la década, es perfecta y contiene el todo.

Los pitagóricos llamaban *tetraktys* todo conjunto o suma de cuatro cosas. Hay diferentes *tetraktys*, pero la que vamos a estudiar ahora es la *tetraktys* por excelencia, la *tetraktys* pitagórica por la cual los pitagóricos prestaban juramento. En un fragmento de Espeusipo se puede leer que el número diez contiene en sí la variedad lineal, plana y sólida del número, porque 1 es un punto, 2 una línea, 3 un triángulo y 4 una pirámide [10].

Filón el Judío [11], retomando los conceptos pitagóricos, dice que cuatro son los límites de las cosas: punto, línea, superficie y sólido, y Geminus dice que la aritmética está dividida en teoría de los números lineales, planos y sólidos.

La perfección, o la conclusión de la manifestación universal, se alcanzan con el número diez, que es la suma de los números hasta cuatro. La década contiene el todo, como la unidad, que contiene el todo potencialmente.

Esta constatación es el resultado del límite puesto al desarrollo de los números por la tridimensionalidad del espacio, y se llegaría al reconocimiento de esta propiedad del 4 y del 10, incluso si la numeración de la que hemos hablado en lugar de ser decimal fuera, por ejemplo, una numeración duodecimal o de base ternaria. Por lo demás, constatamos la coincidencia. La razón por la cual la numeración, de la que hemos hablado, griega, latina, italiana, francesa, etc., es decimal, proviene del hecho de que el hombre posee diez dedos, lo que es una gran comodidad para contar (contar con los dedos), hasta el punto de que en la escritura antigua, latina y griega, la unidad era representada por un dedo, identificado después con la letra I. El último dedo es el décimo, por consiguiente 10 es perfecto. En las dos escrituras, cinco tiene una representación especial, en griego la de la inicial de la palabra *penté*, en latín la de la palma de la mano abierta, identificada más tarde con la letra V, pues entre los latinos la escritura de los números precede al conocimiento y uso del alfabeto. El número 10 está representado en griego por la letra delta D, inicial de década y que tiene la forma de un triángulo equilátero, mientras que en latín está representado por las dos manos abiertas y opuestas, signo que se identificó con la letra X. Estos signos bastan, en la escritura griega y latina de los números, para representar o escribir los números hasta cien, representado en griego por la inicial H, de la palabra *hécaton*, y en latín por un signo, identificado después con la inicial de *centum*, C.

La *tetraktys* pitagórica, como la numeración hablada, ponen en evidencia la importancia del número diez por caminos que no tienen nada en común. Y ésta no es la única concordancia entre los números 4 y 10, ya que la lengua griega forma los nombres de los números de diez hasta 99 utilizando los de los diez primeros números, pero introduce un nombre nuevo para indicar 100, otro para 1000 y finalmente uno nuevo y último para indicar la decena de mil o miríada. La misma palabra *múrioi*, pero acentuada diferentemente, indica un número muy grande, indeterminado. En suma, la lengua griega dispone solamente de cuatro nombres, después de los nueve, para designar las cuatro primeras potencias de diez y se para en la cuarta potencia, como la suma de los números enteros se termina con el número cuatro en la *tetraktys*.

Una tercera constatación, relativa a la década (y por consiguiente a la *tetraktys*), es la siguiente: después de la unidad que es potencialmente poligonal, piramidal y poliédrica, del género que sea, el primer número que es simultáneamente lineal, triangular y tetraédrico, y que aparece por consiguiente en la irradiación de la unidad y en la forma más simple de manifestación y de concretización de la unidad, es el número diez. Es el primer número que aparece simultáneamente en las tres sucesiones de los números lineales, triangulares y tetraédricos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...
1 3 6 10 15 21 ...
1 4 10 20 ...

No se conoce mas que cinco números que gozan de esta propiedad, que son: 1, 10, 120, 1540 y 7140. La determinación de los otros números que son simultáneamente triangulares y tetraédricos depende de la resolución de la ecuación que se obtiene haciendo al $x^{\text{enésimo}}$ número triangular igual al $y^{\text{enésimo}}$ número tetraédrico, o de la resolución de la ecuación de tercer grado con dos incógnitas:

$$\underline{\mathbf{x\ (x + 1)}} = \underline{\mathbf{y\ (y + 1)\ (y + 2)}}$$

ecuación de la que se conoce las cinco soluciones:

x	**1**	**4**	**15**	**55**	**119**
y	**1**	**3**	**8**	**20**	**34**

pero de la cual, la matemática moderna no sabe determinar las otras soluciones eventuales enteras.

Una cuarta constatación viene de que la letra delta es la cuarta del alfabeto griego y tiene la forma de un triángulo equilátero. La letra D = delta es también la cuarta letra del alfabeto etrusco, latino y fenicio y de los diferentes alfabetos griegos (en uso en diversas épocas); ahora bien, aunque el orden de las letras de un alfabeto no está determinado por una ley de la naturaleza, no hay que descuidar esta observación por el valor que podían atribuirle, si no todos los pitagóricos, al menos algunos. La década es pues el cuarto número triangular y el tercero tetraédrico, y tiene la forma, en la escritura de los números, de su inicial, la cuarta letra del alfabeto, que tiene la forma de un triángulo.

Si se toma el cuarto número triangular, está representado así,

.
. .
. . .
. . . .

Figura 5

figura que se encuentra en Teón de Esmirna y en Nicómaco de Gerasa. Esta figura de la década es un símbolo, en el sentido etimológico de la palabra, por consiguiente implica varios sentidos. Hay un símbolo que es un triángulo o número triangular; es el cuarto número triangular, y está compuesto por diez puntos dispuestos en cuatro filas que contienen respectivamente uno, dos, tres y cuatro puntos. "Mira, dice Luciano, aquello que crees que es cuatro es diez, y el triángulo perfecto, y nuestro juramento" [12].

Una quinta constatación muy importante, en general y ciertamente para los pitagóricos, se tiene con la escala musical. La música moderna utiliza la escala temperada, que corresponde aproximadamente a la escala natural basada en el principio de relaciones simples; los griegos, al contrario, utilizaban la escala pitagórica basada en el principio de quinta. Veremos más adelante el origen de esta escala; de momento limitémonos a constatar que estas escalas están, las tres, constituidas por siete notas fundamentales dispuestas en el orden conocido. Los griegos llamaban a la octava, armonía.

Las notas fundamentales de esta gama, u octava, de la cual, por la ley de quinta se deduce las otras, son, la primera, la cuarta, la quinta y la octava; es decir las cuatro cuerdas del tetracordio de Filolao: la primera, la cuarta o sílaba, la quinta o diapente, y el diapasón. Según la tradición, Pitágoras había descubierto, por observación y experiencia, que las relaciones entre la longitud de estas cuerdas y la longitud de la primera estaban expresadas por las relaciones numéricas 4:3, 3:2, 2:1, así pues por relaciones entre los números de la *tetraktys*, que son no solamente relaciones simples sino las más simples posibles. El tetracordio de Filolao muestra que en el dominio de la armonía, en el fondo, se vuelve a encontrar 1, 2, 3, 4, los mismos números que aparecen en la *tetraktys*. "Este descubrimiento, escribió Delatte [13], produjo en todos los espíritus, particularmente en los pitagóricos, un efecto extraordinario que no podemos apenas apreciar hoy. La *tetraktys* les daba la llave de los misterios de la acústica y extendieron a todos los dominios de la física las conclusiones de este descubrimiento". Este vino a ser uno de los fundamentos de su filosofía aritmológica y se comprende que hayan podido considerar la *tetraktys* como la "fuente y la raíz de la eterna Naturaleza".

La fórmula poética del juramento pitagórico nos ha sido transmitida por diferentes autores; y su forma más corriente y más exacta es la siguiente [14]:

"No, lo juro por aquel que ha transmitido a nuestra alma la *tetraktys* en que se encuentran la fuente y la raíz de la eterna Naturaleza". Una variante de esta fórmula se encuentra en los "Versos Dorados".

El símbolo pitagórico de la *tetraktys*, en su forma esquemática de triángulo equilátero, coincide manifiestamente con la forma esquemática del delta masónico, así como con aquella del delta cristiano, símbolo de la Trinidad. Esta última asimilación se hace fácilmente, demasiado fácilmente incluso, sobre todo cuando en el interior está inscrito el ojo del Padre eterno. El carácter cristiano del símbolo masónico no es tan evidente cuando, como sucede a menudo, el centro del triángulo se adorna con el tetragrammaton, el nombre de Dios en cuatro letras, que los cabalistas denominaban por esta palabra griega; y desaparece totalmente cuando el triángulo está inscrito en la estrella de cinco brazos, el pentalfa pitagórico, como en el frontispicio de la Estrella Flamígera del barón de Tschoudy, a quien se le atribuye el ritual de primer grado del Rito Escocés.

Además, el delta sagrado que, con el sol y la luna, es una de las tres luces sublimes de la sociedad de los franc-masones, como lo enseña el ritual del Aprendiz, se encuentra, en los trabajos de primer grado, entre los símbolos del sol y de la luna, detrás del asiento del Venerable; mientras que en los trabajos de segundo grado es reemplazado por la Estrella Flamígera. Los años iniciáticos del Aprendiz y del Compañero corresponden a este cambio. Hay pues conexión entre los dos símbolos; y, como sin duda alguna la estrella de cinco brazos es un símbolo característico tanto de la antigua cofradía pitagórica como de la franc-masonería, la identificación del delta masónico con la *tetraktys* pitagórica se halla confirmada. De esto a decir que la estrella de cinco brazos tiene un carácter cristiano, bastaría con afirmar que fue ésta la que, según el cuarto Evangelio, se apareció a los tres Reyes Magos, Melchor, Gaspar y Baltasar; pero el cuarto Evangelio no se pronuncia sobre este punto; en cuanto a los Evangelios sinópticos, no mencionan siquiera a los tres Reyes Magos. Ahora bien, como los antiguos documentos certifican la continuidad de la tradición masónica que se invoca heredera de Pitágoras, vista la identificación de la masonería con la geometría y la pretensión de los masones de ser los únicos en conocer los números sagrados, nos parece que la identificación del Delta masónico con la *tetraktys* pitagórica está confirmada por argumentos más sólidos que su identificación con el símbolo cristiano.

No hay ningún símbolo cristiano entre los símbolos masónicos, ni siquiera la cruz; por el contrario, -y es natural- hay símbolos de ofiicio y los símbolos geométricos, arquitectónicos y numéricos. Si el delta masónico tuviera un carácter cristiano, sería un símbolo aislado, desplazado, del que no se comprendería la heterogeneidad y la existencia entre los masones. Insistimos sobre este punto no solamente porque es nuestro deber no dejarnos arrastrar por simpatías o antipatías ante la seriedad y la claridad de las investigaciones críticas, sino porque existe al respecto una incomprensión y una ignorancia seculares y perniciosas, y numerosos rituales, lejos de guiar a los hermanos hacia la plena inteligencia del simbolismo, contribuyen, de muy buena o mala fe, a rechazar esta interpretación, indispensable no obstante para penetrar el sentido puramente masónico.

De cualquier manera, no nos proponemos ni afirmar ni descubrir una oposición entre la *tetraktys* pitagórica o delta masónico y el símbolo cristiano de la Trinidad. La oposición del ternario cristiano al cuaternario pitagórico fue obra del fanatismo ciego de los cristianos de los primeros siglos; estaba injustificada porque, como lo veremos, los pitagóricos fueron admiradores de la tríada, y su costumbre de contar y de venerar en todas las cosas el número tres los guiaba incluso en la clasificación de los números.

Resumamos: dos no puede obtenerse más que por la suma de dos unidades. Tres no puede obtenerse más que por la suma de términos de los cuales al menos uno es la unidad.

A partir de cuatro, todos los números pueden obtenerse por la suma de dos términos distintos de la unidad. La representación geométrica de los números en el espacio tridimensional tiene un límite y es perfecta con el número cuatro; por lo tanto, como la suma 1 + 2 + 3 + 4 = 10 es igualmente la nueva unidad del sistema de numeración decimal, resulta de esto la perfección del número cuatro y de la década, así como del símbolo de la *tetraktys*. Es por esta razón que los pitagóricos no prestaron atención a los números superiores a 10, que se expresaban en el lenguaje y en la escritura por diez y los números precedentes, y es por esto quizás que redujeron a los nueve primeros números los números superiores a diez, no teniendo en cuenta más que su raíz o *pythmên*, es decir sustituyéndoles el resto de su división por nueve, o el mismo nueve incluso cuando el número era un múltiplo de nueve; resto que obtenían fácilmente por la regla, muy conocida por otra parte, de la división por nueve.

Ya que el desarrollo de los números por adición tiene un límite con el número cuatro, hay que considerar ahora el desarrollo o generación de los números por multiplicación. Que los pitagóricos hayan recurrido efectivamente a este criterio de distinción, es cierto, puesto que el número siete era consagrado y asimilado a Minerva, pues, como Minerva, era virgen y no engendrado, es decir que no era factor de ningún número (en la década) ni el producto de factores. Los números se distinguen pues en números que no son producidos por otros números, sea los números primeros o asintéticos, y en números que son producidos, o números compuestos o sintéticos. Teniendo en cuenta sólo los números de la década, los números se subdividen en cuatro clases: la clase de los números primeros en la década que son factores de los números de la década; dos (que realmente no es un número) que aparece como factor de 4, de 6, de 8 y de 10; tres que es factor de 6 y de 9; y cinco que es factor de 10. La segunda clase está constituida por los números primeros inferiores a 10 y que no son factores de los números inferiores a 10; está constituida solamente por el número siete. La tercera clase está constituida por los números compuestos inferiores a 10 y que son factores de los números inferiores a diez; está constituida solamente por el número cuatro, que, al mismo tiempo, es el cuadrado de dos y el factor de ocho. La cuarta clase está constituida por los números inferiores a 10 y que son productos de otros números de la década; está constituida por el seis, el ocho y por el nueve, porque $2 . 3 = 6$, $2 . 2 . 2 = 2 . 4 = 8$ y $3 . 3 = 9$. No teniendo en cuenta el 10 y teniendo en cuenta el dos, tenemos cuatro números primeros: 2, 3, 5, 7 de los cuales uno sólo no produce otros números, y cuatro números compuestos: 4, 6, 8, 9 de los cuales uno sólo es también factor.

Hay que señalar, que este criterio pitagórico de distinción en la clasificación de los números de la década coincide perfectamente con el criterio tradicional de distinción al que se ajusta el Vêdânta para la cuádruple clasificación de los veinticinco principios o *tattwas*, y con más precisión: el primer principio (*Prakriti*) que no es producido pero que es productivo, siete principios (*Mahat*, *Ahamkâra* y los 5 *tanmâtras*) que son a la vez producidos y productivos, 16 principios (los 11 *indriyas*, comprendido *Manas* y los 5 *bhûtas*) que son producciones improductivas, y por fin *Purusha* que no es ni producido ni productivo. A este respecto, volvemos a enviar al lector al libro de René Guénon, *El Hombre y su devenir según el Vêdânta* (París, 1925). El mismo criterio es el que inspira, como lo ha observado Colebrooke (*Essais sur la philosophie des Hindous*, traducción Pauthier), la división de la Naturaleza hecha en el tratado *De divisione Naturae* de Escoto Erígena, quien dice: "La división de la naturaleza me parece que debe estar establecida en cuatro diferentes especies, de las cuales, la primera es lo que crea y no es creado; la segunda es lo que es creado y crea; la tercera es lo que es creado y no crea, y, por fin, la cuarta es lo que no es creado y no crea". Naturalmente no es cuestión de hablar de derivación; de cualquier manera, Pitágoras precede, cronológicamente, no solamente a Escoto Erígena sino también a Shankarâchârya. Así queda establecido el carácter tradicional de la doctrina pitagórica de los números.

Traducción: *Miguel Angel Aguirre*

Notas

[*] Cap I de *Les Nombres dans la Tradition Pythagoricienne Maçonnique* [*Los Números en la Tradición Pitagórico Masónica*]. Archè Milano, 1981. Este libro es sumamente importante para comprender el verdadero significado simbólico del número y la geometría en la Masonería. De los siete capítulos de que está compuesto hay tres que se refieren específicamente al simbolismo de los tres primeros grados de aprendiz, compañero y maestro: el capítulo I (cuya traducción presentamos), el IV y el VI, respectivamente. Estos dos últimos irán apareciendo próximamente en EL TALLER. Sobre este libro se hizo una reseña en la revista SYMBOLOS (Nº 9-10, págs. 420-421), y de la que extraemos lo siguiente: "El autor plantea la asimilación de la Masonería con la Tradición Hermética y de ambas con la tradición pitagórica en cuanto se rigen por el número y la geometría, lo que en la Masonería es evidente. A continuación, de modo magistral pasa a exponer en siete apretados y sintéticos capítulos su punto de vista poniendo especial énfasis en el sentido de los números y las figuras geométricas y las propiedades inmutables que los signan de acuerdo a los pitagóricos, y a la totalidad de las tradiciones, aun las más arcaicas, agregaríamos nosotros. El desarrollo es claro y se sigue con toda atención dando posibilidades indefinidas a aquellos que captan adecuadamente la simbólica encerrada en ello, directamente relacionada con la potencialidad de la cosmogonía y el estudio de la forma cósmica como soporte de la meditación y la realización metafísica". (*N. de ed*.).

[1] Platón, *Parménides*, 143 d.
[2] Aristóteles, *Tópicos*, 2, 137.
[3] Heath, *A History of Greek Mathematics*, I, 70.
[4] E. Reidmeister, *Die Arithmetic der Griechen*, 1939, pág. 21.
[5] Proclo, *Comentario a la 20ª proposición de Euclides*, y también Taylor, *The Theoretic Arithmetic of Pythagoreans*, 2ª edición, Los Angeles 1924, pág. 176.
[6] La palabra griega *pyramis* es una ligera corrupción del egipcio *pirem-us* que designa la altura de la pirámide (Cf. E. Revillout, Revue Egyptienne, 2º Año, págs. 305-309). La etimología errónea de pur = fuego, explica por qué el tetraedro es, en Platón, el símbolo del fuego.
[**] [Hemos añadido la figura del tetraedro para complementar gráficamente lo que dice el autor]
[7] Aristóteles, *Del cielo*, III, 8.
[8] Cf. M. Cantor, *Die Römisçhen Agrimensoren*, Leipzig 1875, págs. 95, 127.
[9] Cf. William Bragg, *Lêarchitettura delle cose*, versión italiana, 2ª edición, Milán 1935, pág. 157.
[10] Heath, *A History of Greek Mathematics*, 75.
[11] Filón, *De opificio Mundi*, 10, 16, 34.
[12] Luciano, *Les philosophes à lêencan*, 4.
[13] Delatte, *Etudes sur la littérature pythagoricienne*, pág. 259.
[14] Delatte, *op. cit*., pág. 250.